

Runda 1

Całka 1.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

## Całka 1.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

$$= \operatorname{arcsinh}(e^x) = \ln \left( e^x + \sqrt{e^{2x} + 1} \right) + C$$

## Całka 2.

$$\int \cos^2 x \, dx$$

## Całka 2.

$$\int \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Całka 3.

$$\int \ln^2 x \, dx$$

### Całka 3.

$$\int \ln^2 x \, dx$$

$$= 2x + x \ln^2 x - 2x \ln x + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{16 - x^4}$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{16 - x^4}$$

$$= \frac{1}{32} \left( -\ln(2 - x) + \ln(2 + x) - 2\operatorname{arctg} \left( \frac{2}{x} \right) \right) + C$$

Całka 1.

$$\int \frac{dx}{1 + e^{2x}}$$

## Całka 1.

$$\int \frac{dx}{1 + e^{2x}}$$

$$= x - \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + C$$

## Całka 2.

$$\int \arcsin^2 x \, dx$$

## Całka 2.

$$\int \arcsin^2 x \, dx$$

$$= 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + x\arcsin^2 x + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

### Całka 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{sgn} \left( \cos \left( \frac{x}{2} \right) \right) \log \left( \frac{\cos \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4}} \right) + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^2(x^2 + 4)} dx$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^2(x^2 + 4)} dx$$

$$= \frac{x \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} \right) - 2}{4x} + C$$

Całka 1.

$$\int x \ln x \, dx$$

## Całka 1.

$$\int x \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

## Całka 2.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

## Całka 2.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \operatorname{tg} x - x + C$$

### Całka 3.

$$\int e^x(x^2 - 6x + 2) dx$$

### Całka 3.

$$\int e^x(x^2 - 6x + 2) dx$$

$$= e^x(x^2 - 8x + 10) + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int e^x(2^x + 3^x) dx$$



## Całka rezerwowa

$$\int e^x(2^x + 3^x) dx$$

$$= \frac{(2e)^x}{1 + \ln 2} + \frac{(3e)^x}{1 + \ln 3} + C$$

Całka 1.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

## Całka 1.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x) + C$$

## Całka 2.

$$\int \sin^3 x \, dx$$

## Całka 2.

$$\int \sin^3 x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

## Całka 3.

$$\int \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx$$

### Całka 3.

$$\int \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx$$

$$= \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} \right) + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \ln(2 - x) - \ln(1 - x) + C$$

Całka 1.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$$

## Całka 1.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$$

$$= -\frac{2}{15} \sqrt{2-x} (3x^2 + 8x + 32) + C$$

Całka 2.

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

## Całka 2.

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C$$

Całka 3.

$$\int \frac{x \cos x \, dx}{\sin^3 x}$$

### Całka 3.

$$\int \frac{x \cos x \, dx}{\sin^3 x}$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}(x)}{2} - \frac{x}{2 \sin^2 x} + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( x + \frac{1}{2} \right) + C$$

## Całka 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

## Całka 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$= \ln \left( \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right) + C$$

## Całka 2.

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

## Całka 2.

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) + C$$

## Całka 3.

$$\int \sin 3x \cos 2x dx$$

### Całka 3.

$$\int \sin 3x \cos 2x dx$$

$$= -\frac{\cos(x)}{2} - \frac{1}{10} \cos(5x) + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$= \operatorname{arctg} \left( \sqrt{x^2 - 1} \right) + C$$

## Całka 1.

$$\int \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) dx$$

## Całka 1.

$$\int \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) dx$$

$$= x \ln(x + \sqrt{4 + x^2}) - \sqrt{4 + x^2} + C$$

## Całka 2.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$$

## Całka 2.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$$

$$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$$

## Całka 3.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

### Całka 3.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34}$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34}$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \left( \frac{x + 3}{5} \right) + C$$

## Całka 1.

$$\int \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} dx$$

## Całka 1.

$$\int \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$= \log(x) - 2 \left(1 + x^{-1/2}\right) \log(\sqrt{x} + 1) + C$$

## Całka 2.

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

## Całka 2.

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} dx$$

### Całka 3.

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} dx$$

$$= 2 \sin x + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}} dx$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}} dx$$

$$= \arcsin \left( \frac{\ln x}{2} \right) + C$$

Runda 2

## Całka 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$$

## Całka 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

## Całka 2.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

## Całka 2.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \ln |\ln x| + C$$

Całka 3.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$$

### Całka 3.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$$

$$== -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$$



## Całka rezerwowa

$$\int \arcsin x \, dx$$

## Całka rezerwowa

$$\int \arcsin x \, dx$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + C$$

## Całka 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$$

## Całka 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2}{3} \left( x^{3/2} + (x-1)^{3/2} \right) + C$$

## Całka 2.

$$\int \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx$$

## Całka 2.

$$\int \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 3) - \ln(x + 2) + C$$

Całka 3.

$$\int \sin x \sin 2x \, dx$$

### Całka 3.

$$\int \sin x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 3x) \, dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{6} \sin 3x + C$$



## Całka rezerwowa

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx$$

## Całka rezerwowa

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

Całka 1.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

## Całka 1.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

$$== \ln |\operatorname{tg}(x/2)| + C$$

## Całka 2.

$$\int \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx$$

## Całka 2.

$$\int \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx$$

$$== \int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\operatorname{arctg}(\cos x) + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)x^2}$$

### Całka 3.

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)x^2}$$

$$== \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{5 - 12x - 9x^2} dx$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{5 - 12x - 9x^2} dx$$

$$= \frac{1}{18} (\ln(3x + 5) - \ln(1 - 3x)) + C$$

Całka 1.

$$\int e^x \sin x \, dx$$

## Całka 1.

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

## Całka 2.

$$\int (1 + 3x^3)e^{x^3} dx$$

## Całka 2.

$$\int (1 + 3x^3)e^{x^3} dx$$

$$= xe^{x^3} + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$$

### Całka 3.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$$

$$= x + 4 \left( \sqrt{x+1} + \ln \left( 1 - \sqrt{x+1} \right) \right) + C$$



## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{\sqrt{7 - 6x - x^2}} dx$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{\sqrt{7 - 6x - x^2}} dx$$

$$= \arcsin \frac{x + 3}{4} + C$$

Półfinał

Całka 1.

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{1+x^3}} dx$$

## Całka 1.

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{1+x^3}} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^4 \sqrt[3]{x^{-3} + 1}} = -\frac{1}{3} \int \frac{(x^{-3})' dx}{\sqrt[3]{x^{-3} + 1}} = -\frac{1}{2} (x^{-3} + 1)^{2/3} + C$$

## Całka 2.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

## Całka 2.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

$$= -\operatorname{ctg} t + t + C = -\operatorname{ctg} \arcsin x + \arcsin x + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$$



### Całka 3.

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + \frac{1}{4(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} + C$$

## Całka 4.

$$\int \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

## Całka 4.

$$\int \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

$$= 2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg} \left( \sqrt{e^x - 1} \right) + C$$

## Całka 5.

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

## Całka 5.

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

$$= \frac{\ln(-x^2 + \sqrt{2} - 1) - \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{2\sqrt{2}} + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 34} dx$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 34} dx$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \left( \frac{x+3}{5} \right) + C$$

## Całka 1.

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$



## Całka 1.

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arsinh} x + C$$

## Całka 2.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

## Całka 2.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$== \frac{1}{2} \int x \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{-x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$$

### Całka 3.

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$== \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3 \ln |1 + t| + C = \dots + C$$

## Całka 4.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

## Całka 4.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} \right) + C$$

Całka 5.

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$



## Całka 5.

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) - \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} + C$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx$$

## Całka rezerwowa

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx$$

$$= \ln \left( -2\sqrt{x^2 - 3x + 2} - 2x + 3 \right) + C$$

Pojedynek o trzecie miejsce

# Calka 1

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x) \sqrt{1 - \operatorname{tg}(x)}}$$

## Calka 1

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1 - \operatorname{tg}(x)}}$$

$$= -2\sqrt{1 - \operatorname{tg}(x)} + C$$

## Calka 2

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

## Calka 2

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log^2(\operatorname{tg}(x)) + C$$



## Calka 3

$$\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

## Calka 3

$$\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}2\arcsin(x)^{3/2} + C$$

## Calka 4

$$\int x\sqrt{x+1} dx$$

## Calka 4

$$\int x\sqrt{x+1} \, dx$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2) + C$$

## Calka 5

$$\int e^{\arcsin x} dx$$

## Calka 5

$$\int e^{\arcsin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} + x \right) e^{\arcsin(x)} + C$$

Final

Całka 1.

$$\int \frac{1}{x(x^{2022} + 1)} dx$$



## Całka 1.

$$\int \frac{1}{x(x^{2022} + 1)} dx$$

$$= \frac{1}{2022} \ln \left| \frac{x^{2022}}{x^{2022} + 1} \right| + C$$

## Całka 2.

$$\int (x^9 + x^3) \sqrt[3]{x^6 + 3} \, dx$$

## Całka 2.

$$\int (x^9 + x^3) \sqrt[3]{x^6 + 3} \, dx$$

$$= \frac{1}{12} (x^9 + 3x^3)^{4/3} + C$$

### Całka 3.

$$\int \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x(x+1)} dx$$

### Całka 3.

$$\int \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x(x+1)} dx$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln x - \ln(1+x))^2 + C$$

## Całka 4.

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$$

## Całka 4.

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x})}$$

$$= \frac{5 \left( \sqrt[10]{x^3} - 6\sqrt[5]{x} + 4\sqrt[10]{x} - 3 \right)}{6\sqrt[5]{x^2}} - 10 \ln \left( \sqrt[10]{x} + 1 \right) + \ln x + C$$

## Całka 5.

$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$$



## Całka 5.

$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$$

$$= \ln \left| \frac{xe^x}{1+xe^x} \right| + C$$